نصف زمرة التحويلات التامة :

تعريف :

نسمي التطبيق $f: A \to A$ بتحويل المجموعة A ونرمز لمجموعة كل التحويلات لمجموعة A بالرمز $T(A)$. إن المجموعة $T(A)$ مع عملية تركيب التطبيقات (أو جداء التطبيقات تباعاً) هي نصف زمرة ندعوها "نصف زمرة التحويلات الكاملة" للمجموعة A.

إن المجموعة لكل تباديل A ونرمز لها بـ $D(A)$ (أو مجموعة التقابلات في A) تشكل زمرة جزئية من $T(A)$.

تعريف :

نسمي الهومومورفيزم φ من نصف زمرة S إلى نصف زمرة التحويلات $T(A)$ لمجموعة A «تمثيلاً» لنصف الزمرة S (بالتحويلات) وإذا كانت φ إضافة لما سبق متباينة فندعوه «تمثيلاً».

تعريف :

إذا كانت S نصف زمرة فإن التحويل $\rho_a: S \to S$ حيث $x \to xa$ حيث $a \in S$ يدعى «الانسحاب اليميني الداخلي» لنصف الزمرة S المقابل للعنصر a من S.

كما أن التحويل $\lambda_a: S \to S$ حيث $x \to ax$ حيث $a \in S$ يدعى «الانسحاب اليساري الداخلي» لنصف الزمرة S المقابل للعنصر a من S.

تمرين :

أثبت أن كلاً من $\{\rho_a ; a \in S\}$ ، $\{\lambda_a ; a \in S\}$ نصف زمرة جزئية من $T(S)$

أي يجب أن نبرهن أن كلاً من المجموعتين مغلقة بالنسبة للضرب (التركيب التطبيقات)

من أجل ذلك يكفي أن نبرهن

$$\rho_a \rho_b = \rho_{a.b} \qquad \lambda_a \lambda_b = \lambda_{ab}$$

$$\forall x \in S ; \ (\rho_a \rho_b)(x) = \rho_a(\rho_b(x)) = (xb)a = x(ba) = \rho_{ba}(x)$$

$$\Rightarrow \rho_a \rho_b = \rho_{ba}$$

أي أن المجموعة $\{\rho_a ; a \in S\}$ مغلقة بالنسبة للضرب وبالتالي فهي نصف زمرة جزئية من $F(S)$

$\forall x \in S ,\ (\lambda_a\lambda_b)(x) = \lambda_a(\lambda_b(x)) = \lambda_a(bx) = a(bx) = (ab)x$
$= \lambda_{ab}(x)$

$\Rightarrow \lambda_a\lambda_b = \lambda_{ab}$

أي أن المجموعة $\{\lambda_a ; a \in S\}$ مغلقة بالنسبة للضرب وبالتالي فهي نصف زمرة جزئية من $T(S)$

تعريف :

إن التطبيق $\ell : S \to T(S)$ حيث $a \mapsto \lambda_a$ يدعى «التمثيل النظامي» لنصف الزمرة S بينما التطبيق $\psi : S \to T(S)$ حيث $a \mapsto \rho_a$ يدعى «التمثيل النظامي المعاكس لنصف الزمرة S»

إذا كان ℓ تمثيلاً نظامياً لنصف الزمرة S^1 فإننا ندعوه «ممدد التمثيل النظامي» لنصف الزمرة S وبطريقة مماثلة نعرف ممدد التمثيل النظامي المعاكس

تمرين

أثبت أن كلاً من ممدد التمثيل النظامي والمعاكس هو تمثيل [illegible] دوماً أمين

الحل :

$\ell : S^1 \to T(S^1)$ ، $a \mapsto \lambda_a$ وليكن $a,b \in S^1$ ولنفرض أن $\ell(a)=\ell(b)$

$\ell(a)=\ell(b) \Rightarrow \lambda_a = \lambda_b \Rightarrow \forall x \in S^1 ; \lambda_a(x) = \lambda_b(x)$

$\Rightarrow \forall x \in S^1 ; ax = bx$

ومنه :

$1 \in S^1 \Rightarrow a1 = b1 \Rightarrow a = b$ فالتطبيق ℓ متباين وبالتالي التمثيل أمين

تعريف :

نقول عن التحويل ρ لنصف زمرة S أنه «انسحاب يميني» لـ S إذا كان

$x\rho(y) = \rho(xy) \ ; \ \forall x,y \in S$

ونقول عن تحويل λ لنصف زمرة S أنه انسحاب يساري لـ S إذا كان

$\lambda(x)y = \lambda(xy) \ ; \ \forall x,y \in S$

نقول عن الانسحاب اليميني ρ واليساري λ لنصف زمرة S أنهما مترابطان إذا كان

$$x\lambda(y) = \rho(x)y \; ; \; \forall x, y \in S$$

تمرين

برهن أن الانسحابين الداخليين λ_a ، ρ_a مترابطان

الحل:

$$x\lambda_a(y) = x(ay) = xay$$
$$\rho_a(x)y = (xa)y = xay \Big\} \Rightarrow x\lambda_a(y) = \rho_a(x)y$$

أي أن λ_a ، ρ_a مترابطان

مبرهنة

ليكن λ، ρ انسحابين يساري ويميني لنصف زمرة S وليكن $a \in S$ عندئذٍ

$$\lambda\lambda_a = \lambda_{\lambda(a)} \qquad \rho\rho_a = \rho_{\rho(a)}$$

وإذا كان λ، ρ مترابطان فإن

$$\lambda_a\lambda = \lambda_{\rho(a)} \qquad \rho_a\rho = \rho_{\lambda(a)}$$

البرهان

$$\forall x \in S \; ; \; (\lambda\lambda_a)x = \lambda(\lambda_a(x)) = \lambda(ax) = \lambda(a)x = \lambda_{\lambda(a)}(x)$$
$$\Rightarrow \lambda\lambda_a = \lambda_{\lambda(a)}$$

$$\forall x \in S \; (\rho\rho_a)(x) = \rho(\rho_a(x)) = \rho(xa) = x\rho(a) = \rho_{\rho(a)}(x)$$
$$\Rightarrow \rho\rho_a = \rho_{\rho(a)}$$

بفرض أن λ، ρ مترابطان فإن:

$$\forall x \in S \; ; \; (\lambda_a\lambda)(x) = \lambda_a(\lambda(x)) = a\lambda(x) = \rho(a)x = \lambda_{\rho(a)}(x)$$
$$\Rightarrow \lambda_a\lambda = \lambda_{\rho(a)}$$

$$\forall x \in S \; ; \; (\rho_a\rho)(x) = \rho_a(\rho(x)) = \rho(x)a = x\lambda(a) = \rho_{\lambda(a)}(x)$$
$$\Rightarrow \rho_a\rho = \rho_{\lambda(a)}$$

تمرين:

اثبت انه اذا كانت نصف الزمرة S تملك محايداً يمينياً فإن كل انسحاب يميني لها هو داخلي

الحل:

ليكن ρ انسحاباً يمينياً لـ S و 1 محايد يميني في S $\forall x \in S$ فإن

$x\rho(1) = \rho(x1) \Rightarrow \forall x \in S \quad x\rho(1) = \rho(x)$

$\Rightarrow \rho_{\rho(1)}(x) = \rho(x) \quad \forall x \in S$

$\Rightarrow \rho_{\rho(1)} = \rho$

إذن ρ هو انسحاب يميني داخلي